

Class 9 गणित मंजरी Chapter 3

अंतिम प्रश्नावली (End-of-Chapter Exercises) के समाधान

प्रश्न 1. लंबा भाग करके निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को सांत दशमलव अथवा अनंत आवर्ती दशमलव के रूप में लिखिए—

(i) $3/50$

हल:

$$3 \div 50 = 0.06$$

अतः,

$$3/50 = 0.06$$

यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

उत्तर: **0.06**

(ii) $2/9$

हल:

$$2 \div 9 = 0.22222...$$

अतः,

$$2/9 = 0.22222... = 0.\overline{2}$$

यह एक अनंत आवर्ती दशमलव प्रसार है।

उत्तर: **$0.\overline{2}$**

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल:

मान लीजिए कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

तब इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$\sqrt{5} = p/q$$

जहाँ p और q सह-अभाज्य पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ ।

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर:

$$5 = p^2/q^2$$

अतः,

$$p^2 = 5q^2$$

इससे p^2 , 5 से विभाज्य है, इसलिए p भी 5 से विभाज्य होगा।

मान लें:

$$p = 5k$$

तब,

$$p^2 = 25k^2$$

और $p^2 = 5q^2$ में रखने पर:

$$25k^2 = 5q^2$$

अतः,

$$q^2 = 5k^2$$

इसलिए q भी 5 से विभाज्य है।

अर्थात् p और q दोनों 5 से विभाज्य हैं, जो इस तथ्य के विरुद्ध है कि p और q सह-अभाज्य हैं।

अतः हमारी मान्यता गलत है।

इसलिए $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 3. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को p/q के रूप में लिखिए।

(i) 12.6

हल:

$$12.6 = 126/10$$

$$= 63/5$$

उत्तर: $63/5$

(ii) 0.0120

हल:

$$0.0120 = 120/10000$$

$$= 3/250$$

उत्तर: $3/250$

(iii) $3.05\overline{2}$

हल:

मान लीजिए,

$$x = 3.052222...$$

$$100x = 305.2222...$$

$$1000x = 3052.2222...$$

घटाने पर:

$$1000x - 100x = 3052.2222... - 305.2222...$$

$$900x = 2747$$

$$x = 2747/900$$

उत्तर: **2747/900**

(iv) $1.\overline{235}$

अर्थात् **1.235235235...**

हल:

मान लीजिए,

$$x = 1.235235235...$$

$$1000x = 1235.235235...$$

घटाने पर:

$$999x = 1234$$

$$x = 1234/999$$

उत्तर: **1234/999**

(v) $0.\overline{23}$

अर्थात् **0.232323...**

हल:

मान लीजिए,

$$x = 0.232323...$$

$$100x = 23.232323...$$

घटाने पर:

$$99x = 23$$

$$x = 23/99$$

उत्तर: 23/99

(vi) $2.0\overline{5}$

अर्थात् $2.05555...$

हल:

मान लीजिए,

$$x = 2.05555...$$

$$10x = 20.5555...$$

$$100x = 205.5555...$$

घटाने पर:

$$90x = 185$$

$$x = 185/90$$

$$= 37/18$$

उत्तर: 37/18

(vii) $2.1\overline{25}$

अर्थात् $2.125125125...$

हल:

मान लीजिए,

$$x = 2.125125125...$$

$$1000x = 2125.125125...$$

घटाने पर:

$$999x = 2123$$

$$x = 2123/999$$

उत्तर: **2123/999**

(viii) $3.\overline{125}$

अर्थात् **$3.125125125...$**

हल:

मान लीजिए,

$$x = 3.125125125...$$

$$1000x = 3125.125125...$$

घटाने पर:

$$999x = 3122$$

$$x = \mathbf{3122/999}$$

उत्तर: **3122/999**

(ix) $2.16\overline{25}$

अर्थात् **$2.16252525...$**

हल:

मान लीजिए,

$$x = 2.16252525...$$

$$100x = 216.252525...$$

$$10000x = 21625.252525...$$

घटाने पर:

$$10000x - 100x = 21625.252525... - 216.252525...$$

$$9900x = 21409$$

$$x = \mathbf{21409/9900}$$

प्रश्न 4. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए—

(i) 0.532

हल:

0.532, 0 और 1 के बीच स्थित है।

इसे इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$0.532 = 532/1000$$

अतः 0 और 1 के बीच की दूरी को उपयुक्त बराबर भागों में बाँटकर 0.532 पर बिंदु अंकित किया जाता है।

उत्तर: 0 और 1 के बीच 0.532 पर बिंदु।

(ii) 1.15

हल:

1.15, 1 और 2 के बीच स्थित है।

$$1.15 = 1 + 15/100$$

अर्थात् 1 से दाईं ओर 0.15 इकाई की दूरी पर बिंदु होगा।

उत्तर: 1 और 2 के बीच 1.15 पर बिंदु।

प्रश्न 5. 3 और 4 के बीच 6 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल:

3 और 4 के बीच की 6 परिमेय संख्याएँ हैं:

3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6

अतः,

$$3 < 3.1 < 3.2 < 3.3 < 3.4 < 3.5 < 3.6 < 4$$

उत्तर: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 और 3.6

प्रश्न 6. $2/5$ और $3/5$ के बीच 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$2/5 = 20/50$$

$$3/5 = 30/50$$

इनके बीच 5 परिमेय संख्याएँ हैं:

$21/50, 22/50, 23/50, 24/50, 25/50$

अतः,

उत्तर: **$21/50, 22/50, 23/50, 24/50$ और $25/50$**

प्रश्न 7. $1/6$ और $2/5$ के बीच 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$1/6 \text{ और } 2/5 \text{ का LCM} = 30$$

$$1/6 = 5/30$$

$$2/5 = 12/30$$

इनके बीच की 5 परिमेय संख्याएँ हैं:

$6/30, 7/30, 8/30, 9/30$ और $10/30$

सरल रूप में:

$1/5, 7/30, 4/15, 3/10$ और $1/3$

उत्तर: **$1/5, 7/30, 4/15, 3/10$ और $1/3$**

प्रश्न 8. यदि $x/3 + x/5 = 16/15$ है, तो परिमेय संख्या x ज्ञात कीजिए।

हल:

$$x/3 + x/5 = 16/15$$

दोनों पक्षों को 15 से गुणा करने पर:

$$5x + 3x = 16$$

$$8x = 16$$

$$x = 16/8$$

$$x = 2$$

उत्तर: $x = 2$

प्रश्न 9. a और b दो अशून्य परिमेय संख्याएँ हैं तथा $a + 1/b = 0$ । बिना संख्यात्मक मान दिए ज्ञात कीजिए कि ab धनात्मक है या ऋणात्मक।

हल:

दिया है:

$$a + 1/b = 0$$

अतः,

$$a = -1/b$$

दोनों पक्षों को b से गुणा करने पर:

$$ab = -1$$

चूँकि -1 एक ऋणात्मक संख्या है, इसलिए:

ab ऋणात्मक है।

उत्तर: $ab = -1$, अतः ab ऋणात्मक है।

प्रश्न 10. एक परिमेय संख्या का सांत दशमलव प्रसार है, जिसका अंतिम अशून्य अंक चौथे दशमलव स्थान पर है। सिद्ध कीजिए कि इसे $p/10^4$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p एक पूर्णांक है जो **10** से विभाज्य नहीं है। क्या निम्नतम रूप में हर का 2^4 अथवा 5^4 से विभाज्य होना आवश्यक है? कारण दीजिए।

हल:

मान लीजिए संख्या है:

0.abcd

जहाँ $d \neq 0$ ।

तब,

$$0.abcd = p/10000$$

अर्थात्,

$$p/10^4$$

जहाँ अंतिम अंक अशून्य होने के कारण p , **10** से विभाज्य नहीं है।

अब निम्नतम रूप में हर केवल **2** और **5** के गुणनखंडों के रूप में होगा।

लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि हर 2^4 अथवा 5^4 से विभाज्य हो।

उदाहरण:

$$0.0012 = 12/10000$$

$$= 3/250$$

$$\text{यहाँ } 250 = 2 \times 5^3 \text{ है।}$$

यह न तो 2^4 से विभाज्य है और न ही 5^4 से।

अतः निम्नतम रूप में हर का 2^4 अथवा 5^4 से विभाज्य होना आवश्यक नहीं है।

प्रश्न 11. बिना भाग किए ज्ञात कीजिए कि **18/125** का दशमलव प्रसार सांत होगा या अनंत। यदि सांत है, तो दशमलव स्थानों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल:

$$125 = 5^3$$

हर में केवल 5 का गुणनखंड है।

अतः दशमलव प्रसार सांत होगा।

हर को 10 की घात बनाने के लिए:

$$125 \times 8 = 1000$$

अतः,

$$18/125 = 144/1000$$

$$= 0.144$$

इसमें 3 दशमलव स्थान हैं।

उत्तर: सांत दशमलव प्रसार, 3 दशमलव स्थान।

प्रश्न 12. एक परिमेय संख्या के निम्नतम रूप में हर $2^3 \times 5$ है। इसके दशमलव प्रसार में कितने दशमलव स्थान होंगे?

हल:

हर है:

$$2^3 \times 5$$

$$= 8 \times 5$$

दशमलव समाप्त करने के लिए हर को 10^3 बनाया जा सकता है।

$$2^3 \times 5 \times 5^2 = 2^3 \times 5^3$$

$$= 10^3$$

अतः दशमलव प्रसार में 3 दशमलव स्थान होंगे।

उत्तर: 3 दशमलव स्थान।

प्रश्न 13. $a = 7/12$ और $b = 5/6$ हैं। दोनों को k_1/m और k_2/m के रूप में लिखिए, जहाँ $k_2 - k_1 > 6$ हो। समान हर का उपयोग करके इनके बीच ठीक पाँच भिन्न परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल:

दिया है:

$$a = 7/12$$

$$b = 5/6$$

हम 36 को समान हर लेते हैं।

$$7/12 = 21/36$$

$$5/6 = 30/36$$

यहाँ:

$$k_1 = 21$$

$$k_2 = 30$$

अतः,

$$k_2 - k_1 = 30 - 21 = 9$$

और,

$$9 > 6$$

अब 21/36 और 30/36 के बीच पाँच भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं:

$$22/36, 23/36, 24/36, 25/36 \text{ और } 26/36$$

अतः:

$$7/12 < 22/36 < 23/36 < 24/36 < 25/36 < 26/36 < 5/6$$

शर्त $k_2 - k_1 > n + 1$ क्यों आवश्यक है?

यदि दो संख्याओं के अंशों के बीच n संख्याएँ चाहिए, तो उनके बीच पर्याप्त पूर्णांक अंश होने चाहिए।

इसीलिए:

$$k_2 - k_1 > n + 1$$

की शर्त आवश्यक है।

उत्तर: 22/36, 23/36, 24/36, 25/36 और 26/36

प्रश्न 14. तीन परिमेय संख्याएँ x, y, z इस प्रकार हैं कि $x + y + z = 0$ तथा $xy + yz + zx = 0$ । सिद्ध कीजिए कि x, y, z तीनों एक साथ शून्य हैं।

हल:

दिया है:

$$x + y + z = 0$$

अतः,

$$(x + y + z)^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 0$$

दिया है:

$$xy + yz + zx = 0$$

अतः,

$$2xy + 2yz + 2zx = 0$$

इसलिए,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

चूँकि तीनों वर्गों का योग शून्य है, इसलिए:

$$x^2 = 0, y^2 = 0 \text{ और } z^2 = 0$$

अतः,

$$x = y = z = 0$$

उत्तर: तीनों परिमेय संख्याएँ एक साथ शून्य हैं।

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्या $(a + b)/2$, परिमेय संख्याओं a और b के बीच स्थित है।

हल:

मान लीजिए:

$$a < b$$

हमें सिद्ध करना है:

$$a < (a + b)/2 < b$$

पहला भाग:

$$a < (a + b)/2$$

दोनों पक्षों को 2 से गुणा करने पर:

$$2a < a + b$$

अतः:

$$a < b, \text{ जो सत्य है।}$$

अब दूसरा भाग:

$$(a + b)/2 < b$$

दोनों पक्षों को 2 से गुणा करने पर:

$$a + b < 2b$$

अतः:

$$a < b, \text{ जो सत्य है।}$$

इसलिए,

$$a < (a + b)/2 < b$$

अतः $(a + b)/2$, a और b के बीच स्थित है।

प्रश्न 16. चित्र 3.14 में दिए गए सभी समकोण त्रिभुजों के कर्णों की लंबाई ज्ञात कीजिए। यह चित्र वर्गमूल सर्पिल (**Square Root Spiral**) कहलाता है।

हल:

प्रत्येक नए समकोण त्रिभुज में एक भुजा 1 इकाई है।

पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करने पर क्रमशः कर्ण प्राप्त होते हैं:

पहला कर्ण:

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

दूसरा कर्ण:

$$\sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$$

इसी प्रकार क्रमशः:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10} \text{ और } \sqrt{11}$$

सरल रूप में:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10} \text{ और } \sqrt{11}$$

उत्तर: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$ और $\sqrt{11}$ इकाई।