Class 9 गणित मंजरी Chapter 3 – संख्याओं का संसार

Chapter Notes | अध्याय नोट्स

---

1. संख्याओं का संसार

संख्याओं का विकास मानव की गिनती करने की आवश्यकता से हुआ। समय के साथ संख्या-पद्धति का विस्तार हुआ और प्राकृत संख्याओं से लेकर पूर्णांक, परिमेय, अपरिमेय तथा वास्तविक संख्याओं तक संख्या-जगत विकसित हुआ।

---

2. प्राकृत संख्याएँ (Natural Numbers)

गिनती के लिए प्रयोग की जाने वाली संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ कहलाती हैं।

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

मुख्य बिंदु:

- प्राकृत संख्याएँ **1** से शुरू होती हैं।
- इनमें **0** शामिल नहीं होता।
- प्राकृत संख्याएँ योग के अंतर्गत संवृत होती हैं।

उदाहरण:

2 + 3 = 5

अर्थात दो प्राकृत संख्याओं का योग भी एक प्राकृत संख्या है।

---

3. शून्य की क्रांति

प्राचीन समय में संख्या-पद्धति में शून्य का विचार नहीं था। बाद में शून्य ने गणित में एक महत्वपूर्ण स्थान प्राप्त किया।

शून्य = 0

शून्य न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक।

संख्या रेखा पर शून्य मूल बिंदु का कार्य करता है।

ब्रह्मगुप्त ने शून्य को एक संख्या के रूप में गणितीय संक्रियाओं से जोड़ा।

---

4. पूर्णांक (Integers)

प्राकृत संख्याओं में **0** और ऋणात्मक संख्याएँ जोड़ने पर पूर्णांकों का समूह प्राप्त होता है।

Z = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...}

पूर्णांकों के प्रकार:

धनात्मक पूर्णांक:
1, 2, 3, 4, ...

ऋणात्मक पूर्णांक:
−1, −2, −3, −4, ...

शून्य:
0

पूर्णांक संख्या रेखा को दोनों दिशाओं में विस्तृत करते हैं।

---

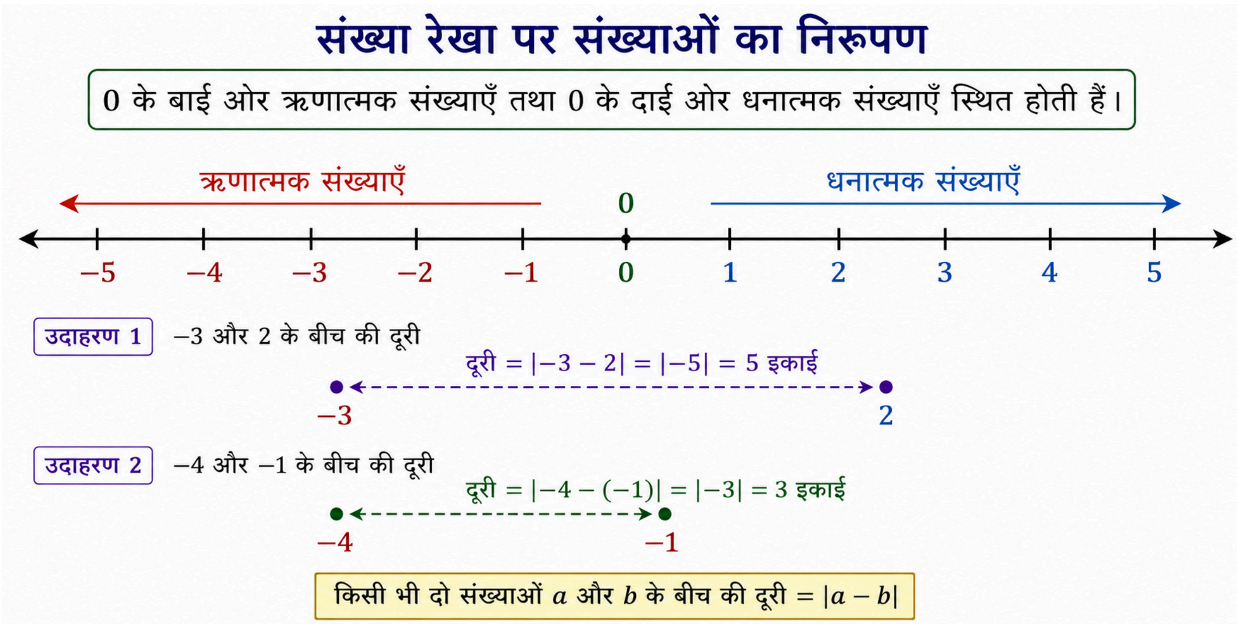
5. संख्या रेखा (Number Line)

संख्या रेखा पर:

- **0** के दाईं ओर धनात्मक संख्याएँ होती हैं।
- **0** के बाईं ओर ऋणात्मक संख्याएँ होती हैं।
- दाईं ओर जाने पर संख्याएँ बड़ी होती जाती हैं।
- बाईं ओर जाने पर संख्याएँ छोटी होती जाती हैं।

उदाहरण:

−3 < −1 < 0 < 2 < 5



---

6. परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)

वे संख्याएँ जिन्हें

p/q

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ:

p और q पूर्णांक हैं तथा q ≠ 0

उन्हें परिमेय संख्याएँ कहते हैं।

उदाहरण:

1/2, −3/4, 5, 0, 7/3

क्योंकि:

5 = 5/1

और

0 = 0/1

अतः सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं।

परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

किसी परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए उसके निकटवर्ती पूर्णांकों के बीच की दूरी को हर के अनुसार बराबर भागों में बाँटा जाता है।

उदाहरण:

9/4 = 2 1/4

यह **2** और **3** के बीच स्थित है।

2 और 3 के बीच की दूरी को **4** बराबर भागों में बाँटकर 2 से दाईं ओर पहला भाग लेने पर **9/4** प्राप्त होगा।

---

7. परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान

किसी परिमेय संख्या **x** का निरपेक्ष मान **|x|** द्वारा दर्शाया जाता है।

यह संख्या रेखा पर उस संख्या की **0** से दूरी को दर्शाता है।

उदाहरण:

|5/3| = 5/3

|−5/3| = 5/3

अर्थात किसी संख्या का निरपेक्ष मान सदैव ऋणात्मक नहीं होता।

---

8. दो परिमेय संख्याओं के बीच दूरी

दो परिमेय संख्याओं **a** और **b** के बीच की दूरी:

|a − b|

होती है।

उदाहरण:

a = −4, b = 3

दूरी = **|−4 − 3|**

= **|−7|**

= **7**

---

9. परिमेय संख्याओं की सघनता

किन्हीं भी दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्याएँ होती हैं।

यदि **a** और **b** दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो उनके बीच एक परिमेय संख्या उनका माध्य लेकर ज्ञात की जा सकती है:

महत्वपूर्ण सूत्र:

(a + b)/2

उदाहरण:

1 और 3/2 के बीच:

(1 + 3/2)/2

= (2/2 + 3/2)/2

= 5/2 ÷ 2

= **5/4**

अतः:

1 < 5/4 < 3/2

इसी प्रकार बार-बार माध्य लेकर दो परिमेय संख्याओं के बीच और परिमेय संख्याएँ प्राप्त की जा सकती हैं।

---

10. अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)

वे संख्याएँ जिन्हें दो पूर्णांकों के अनुपात अर्थात **p/q** के रूप में नहीं लिखा जा सकता, अपरिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।

उदाहरण:

√2, √3, √5, π

अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार:

- अनंत होता है।
- अनावर्ती होता है।
- इसमें कोई निश्चित अंक-समूह बार-बार नहीं दोहराता।

उदाहरण:

√2 = 1.41421356237...

π = 3.14159265358...

---

11. √2 की अपरिमेयता

√2 को **p/q** के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता।

इसकी अपरिमेयता सिद्ध करने के लिए विरोधाभास द्वारा उपपत्ति का प्रयोग किया जाता है।

इस विधि में:

1. पहले √2 को परिमेय मान लिया जाता है।
2. मान लेते हैं:

√2 = p/q

जहाँ **p** और **q** सह-अभाज्य हैं।

3. वर्ग करने पर:

$p^2 = 2q^2$

4. इससे p सम होता है और आगे सिद्ध होता है कि q भी सम है।
5. इसका अर्थ है कि p और q दोनों में 2 गुणनखंड है।

6. यह इस मान्यता के विरुद्ध है कि p और q सह-अभाज्य हैं।

अतः:

√**2** एक अपरिमेय संख्या है।

विरोधाभास द्वारा उपपत्ति में जिस बात को सिद्ध करना होता है, उसके विपरीत कल्पना करके उत्पन्न तार्किक विरोधाभास से निष्कर्ष निकाला जाता है।

---

12. वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

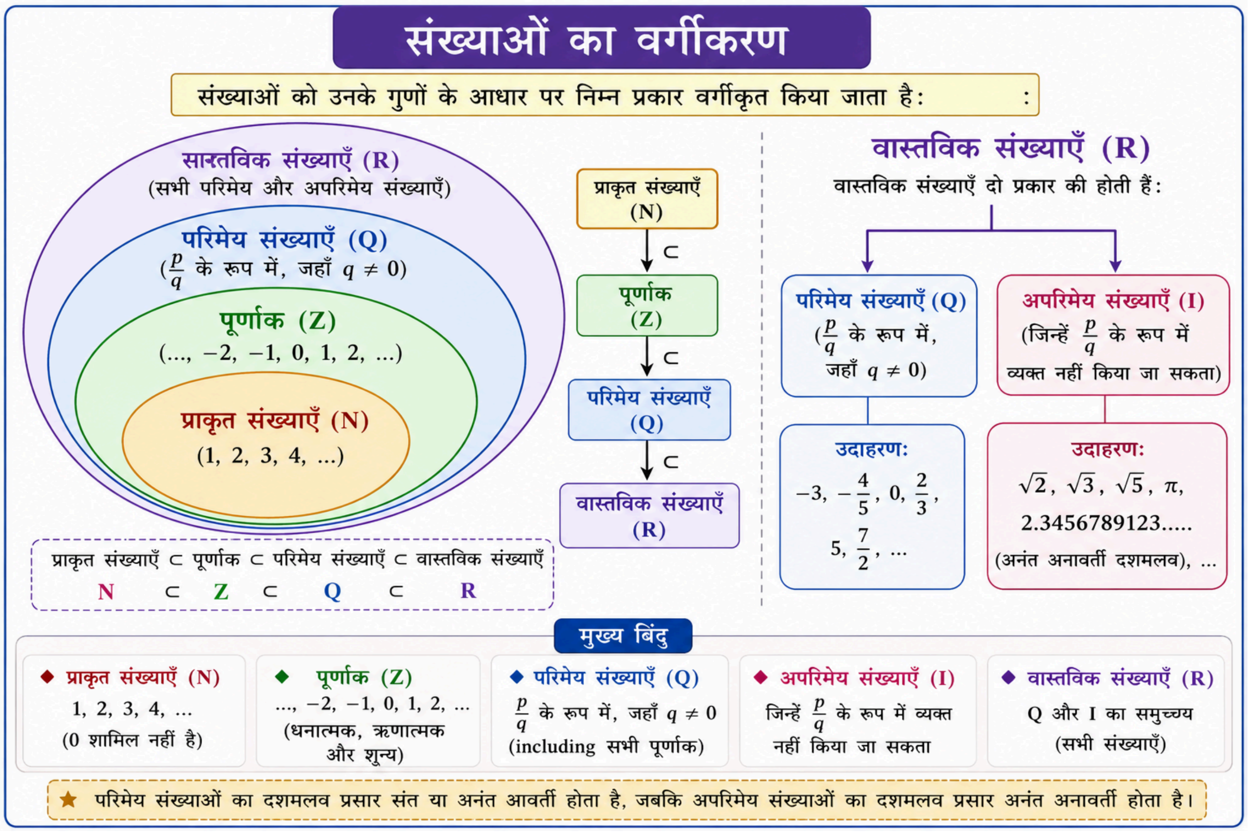
परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को मिलाकर वास्तविक संख्याओं का समूह बनता है।

वास्तविक संख्याएँ **=** परिमेय संख्याएँ **+** अपरिमेय संख्याएँ

अर्थात:

R = Q ∪ **I**

परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ मिलकर एक सतत और अखंड वास्तविक संख्या रेखा बनाती हैं।



---

13. संख्याओं का संबंध

प्राकृत संख्याएँ ⊂ पूर्णांक ⊂ परिमेय संख्याएँ ⊂ वास्तविक संख्याएँ

इसे इस प्रकार समझ सकते हैं:

N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R

जहाँ:

N = प्राकृत संख्याएँ

Z = पूर्णांक

Q = परिमेय संख्याएँ

R = वास्तविक संख्याएँ

वास्तविक संख्याओं में परिमेय और अपरिमेय दोनों संख्याएँ शामिल होती हैं।

---

14. दशमलव प्रसार (Decimal Expansion)

किसी संख्या के दशमलव प्रसार को देखकर यह पहचानने में सहायता मिलती है कि वह परिमेय है या अपरिमेय।

परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार:

1. सांत दशमलव
2. अनंत आवर्ती दशमलव

अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार:

अनंत अनावर्ती दशमलव

---

15. सांत दशमलव (Terminating Decimal)

जब किसी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार एक निश्चित संख्या में दशमलव स्थानों के बाद समाप्त हो जाए, तो वह सांत दशमलव कहलाता है।

उदाहरण:

3/8 = 0.375

7/20 = 0.35

13/250 = 0.052

विभाजन में अंततः शेषफल **0** प्राप्त होता है।

---

16. अनंत आवर्ती दशमलव

जब दशमलव के बाद एक या अधिक अंक लगातार एक निश्चित क्रम में दोहराते रहें, तो उसे अनंत आवर्ती दशमलव कहते हैं।

उदाहरण:

1/3 = 0.3333...

2/9 = 0.2222...

1/7 = 0.142857142857...

यहाँ **142857** बार-बार दोहराता है।

अतः यह एक आवर्ती अंक-समूह है।

---

17. अपरिमेय दशमलव

अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार:

अनंत और अनावर्ती होता है।

अर्थात:

- दशमलव समाप्त नहीं होता।
- कोई निश्चित अंक-समूह बार-बार नहीं दोहराता।

उदाहरण:

√2 = 1.414213562...

π = 3.141592653...

---

18. दशमलव संख्या को **p/q** के रूप में बदलना

सांत दशमलव के लिए

उदाहरण:

12.6

= 126/10

= **63/5**

आवर्ती दशमलव के लिए

उदाहरण:

x = 0.3333...

10x = 3.3333...

अब घटाने पर:

10x − x = 3.3333... − 0.3333...

9x = 3

x = **1/3**

अतः:

0.3333... = 1/3

सामान्य आवर्ती दशमलव के लिए विधि

यदि दशमलव में पहले कुछ अनावर्ती अंक हों और उसके बाद आवर्ती अंक हों:

1. संख्या को **x** मानिए।
2. अनावर्ती अंकों की संख्या के अनुसार **10** की उचित घात से गुणा कीजिए।
3. फिर आवर्ती अंकों की संख्या के अनुसार पुनः **10** की उचित घात से गुणा कीजिए।
4. दोनों समीकरणों को घटाइए।
5. x का मान ज्ञात कीजिए।

---

19. चक्रीय संख्याएँ (Cyclic Numbers)

1/7 = 0.142857142857...

इसमें आवर्ती अंक-समूह:

142857

है।

इसकी विशेषता:

142857 × 1 = 142857

142857 × 2 = 285714

142857 × 3 = 428571

142857 × 4 = 571428

142857 × 5 = 714285

142857 × 6 = 857142

हर बार वही अंक अलग-अलग चक्रीय क्रम में दिखाई देते हैं।

---

20. महत्वपूर्ण तथ्य

✓ सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं।

✓ प्रत्येक परिमेय संख्या को **p/q** के रूप में लिखा जा सकता है**,** जहाँ **q ≠ 0**।

✓ दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्याएँ होती हैं।

✓ दो परिमेय संख्याओं **a** और **b** के बीच एक परिमेय संख्या**:**

(a + b)/2

✓ दो संख्याओं **a** और **b** के बीच दूरी**:**

|a − b|

✓ किसी संख्या **x** का निरपेक्ष मान**:**

|x| = संख्या रेखा पर **0** से उसकी दूरी

✓ परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत या अनंत आवर्ती होता है।

✓ अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनंत अनावर्ती होता है।

✓ √**2,** √**3,** √**5** और **π** अपरिमेय संख्याओं के उदाहरण हैं।

✓ **0.999... = 1**

✓ वास्तविक संख्याएँ **=** परिमेय संख्याएँ **+** अपरिमेय संख्याएँ।