Class 9 गणित मंजरी Chapter 4 – बीजीय सर्वसमिकाओं का अन्वेषण Chapter Notes | अध्याय नोट्स

---

1. अध्याय का परिचय

पिछले अध्यायों में हमने बीजीय व्यंजकों और रैखिक बहुपदों का अध्ययन किया। इस अध्याय में बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन किया जाता है। सर्वसमिकाएँ गणनाओं को सरल बनाने तथा बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में उपयोगी होती हैं।

---

2. बीजीय सर्वसमिका क्या है?

बीजीय सर्वसमिका वह समीकरण है जो उसमें उपस्थित चरों के सभी मानों के लिए सत्य होता है।

उदाहरण:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

यह **x** और **y** के सभी मानों के लिए सत्य है, इसलिए यह एक सर्वसमिका है।

लेकिन:

$$x^2 - 1 = 24$$

केवल कुछ विशेष मानों के लिए सत्य है, इसलिए यह केवल एक समीकरण है, सर्वसमिका नहीं।

---

3. सर्वसमिकाओं का दृश्यांकन

सर्वसमिकाओं को ज्यामितीय प्रदर्शों (मॉडलों) तथा बीजीय टाइलों की सहायता से समझा और प्रदर्शित किया जा सकता है। इसमें वर्गों और आयतों के क्षेत्रों का उपयोग किया जाता है।

---

4. महत्वपूर्ण सर्वसमिकाएँ

सर्वसमिका 1

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

याद रखें:

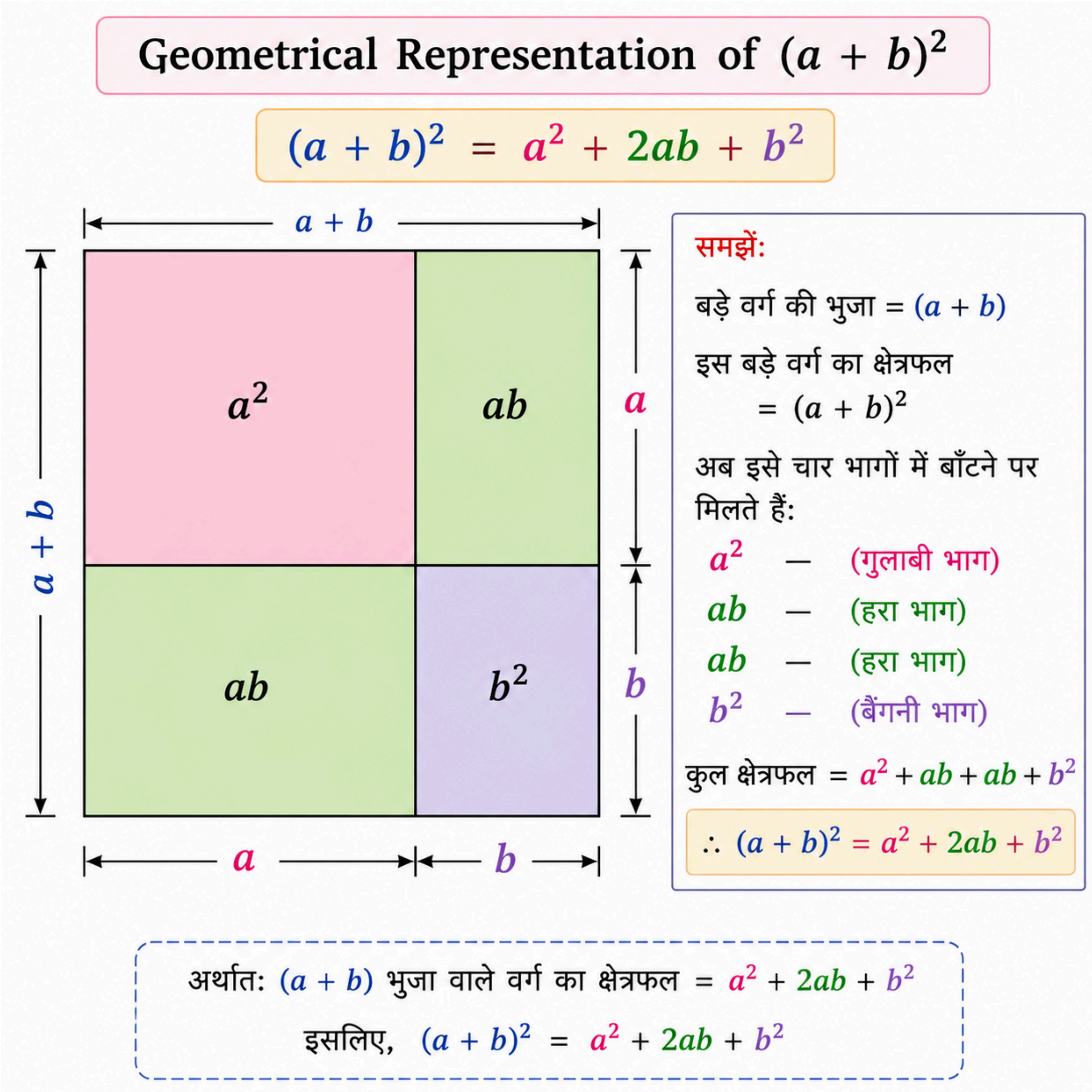
पहले पद का वर्ग **+** दोनों पदों का दोगुना गुणनफल **+** दूसरे पद का वर्ग

उदाहरण:

$(x + 3)^2$

$= x^2 + 2(x)(3) + 3^2$

$= x^2 + 6x + 9$



सर्वसमिका 2

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

याद रखें:

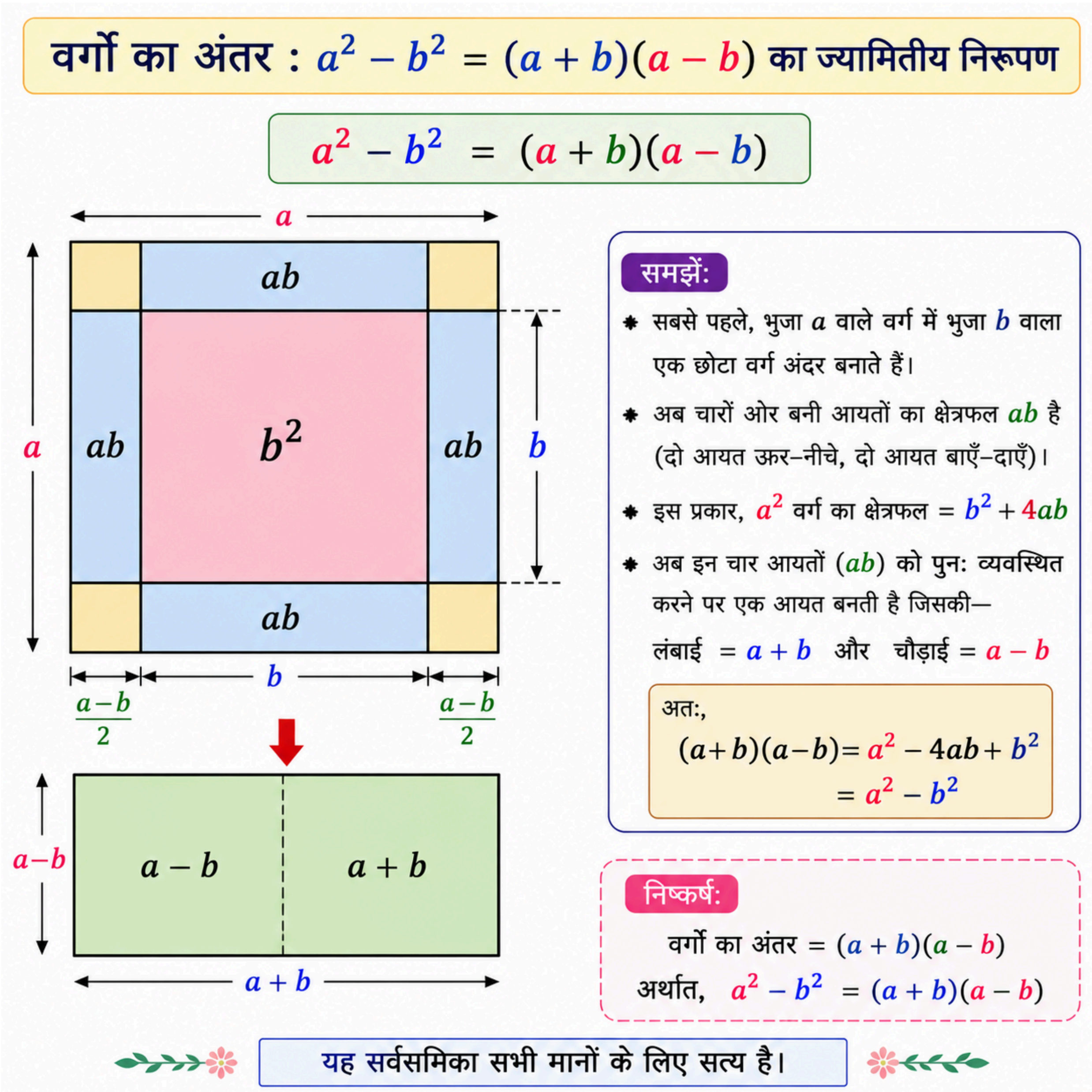
पहले पद का वर्ग **−** दोनों पदों का दोगुना गुणनफल **+** दूसरे पद का वर्ग

उदाहरण:

$(x - 4)^2$

$= x^2 - 2(x)(4) + 4^2$

$= x^2 - 8x + 16$



सर्वसमिका 3

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

अर्थात:

तीनों पदों के वर्गों का योग + प्रत्येक दो पदों के गुणनफल का दोगुना योग

उदाहरण:

$$(x + y + 2)^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2^2 + 2xy + 2(y)(2) + 2(2)(x)$$

$$= x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4y + 4x$$

पाठ्यपुस्तक में इन तीन सर्वसमिकाओं को अध्याय की प्रमुख सर्वसमिकाओं के रूप में प्रस्तुत किया गया है।

---

5. सर्वसमिकाओं का उपयोग करके संख्याओं के वर्ग ज्ञात करना

सर्वसमिकाओं की सहायता से बड़ी संख्याओं के वर्ग आसानी से ज्ञात किए जा सकते हैं।

उदाहरण: 79^2

$$79 = 80 - 1$$

अतः:

$$79^2 = (80 - 1)^2$$

$$= 80^2 - 2(80)(1) + 1^2$$

$$= 6400 - 160 + 1$$

$$= 6241$$

उदाहरण: 105^2

$$105 = 100 + 5$$

अतः:

$105^2 = (100 + 5)^2$

$= 100^2 + 2(100)(5) + 5^2$

$= 10000 + 1000 + 25$

$= 11025$

पाठ्यपुस्तक में सर्वसमिकाओं का उपयोग करके **64^2, 105^2, 205^2, 79^2, 193^2** और **299^2** जैसी गणनाएँ करने का अभ्यास दिया गया है।

---

6. सर्वसमिकाओं का उपयोग करके गुणनखंडन

सर्वसमिकाओं का उपयोग बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए भी किया जाता है।

(i) पूर्ण वर्ग त्रिपद

यदि कोई व्यंजक:

$a^2 + 2ab + b^2$

के रूप में हो, तो:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

उदाहरण:

$x^2 + 4x + 4$

$= x^2 + 2(x)(2) + 2^2$

$= (x + 2)^2$

(ii) ऋणात्मक मध्य पद वाला पूर्ण वर्ग

यदि कोई व्यंजक:

$a^2 - 2ab + b^2$

के रूप में हो, तो:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

उदाहरण:

$x^2 - 6x + 9$

$= x^2 - 2(x)(3) + 3^2$

$= (x - 3)^2$

---

7. कुछ अन्य सर्वसमिकाएँ

अंतर के वर्ग की सर्वसमिका

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

इसे इस रूप में भी लिखा जा सकता है:

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

इसका उपयोग संख्याओं के वर्गों की शीघ्र गणना में किया जा सकता है।

उदाहरण:

55^2

$= (55 + 5)(55 - 5) + 5^2$

$= 60 \times 50 + 25$

$= 3025$

---

8. बीजीय टाइलों का उपयोग करके गुणनखंडन

बीजीय टाइलों की सहायता से गुणनफल और गुणनखंडों को आयत के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

उदाहरण:

$(x + 3)(x + 4)$

वितरण गुणधर्म से:

$= x^2 + 4x + 3x + 12$

$= x^2 + 7x + 12$

अतः:

$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

पाठ्यपुस्तक में इसे बीजीय टाइलों और आयत के क्षेत्रफल की सहायता से समझाया गया है।

---

9. बीजीय टाइलों के उपयोग के बिना गुणनखंडन

द्विघातीय व्यंजक:

$x^2 + bx + c$

का गुणनखंडन करने के लिए ऐसे दो अंक **a** और **b** ज्ञात करें जिनके लिए:

$a + b =$ x के गुणांक

और

$ab =$ अचर पद

फिर:

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

उदाहरण 1

$x^2 + 7x + 12$

हमें ऐसे दो अंक चाहिए जिनका:

योग **= 7**

गुणनफल = **12**

अंक हैं:

3 और **4**

अतः:

$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

उदाहरण 2

$x^2 - 5x + 6$

हमें ऐसे दो अंक चाहिए जिनका:

योग = **−5**

गुणनफल = **6**

अंक हैं:

−2 और **−3**

अतः:

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

---

10. गुणनखंडन की महत्वपूर्ण विधि

$x^2 + px + q$ के लिए

चरण **1:** दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

चरण **2:** उनका योग **p** होना चाहिए।

चरण **3:** उनका गुणनफल **q** होना चाहिए।

चरण **4:** व्यंजक को **$(x + a)(x + b)$** के रूप में लिखिए।

उदाहरण

$x^2 + 11x + 30$

ऐसी दो संख्याएँ:

$5 + 6 = 11$

$5 \times 6 = 30$

अतः:

$x^2 + 11x + 30 = (x + 5)(x + 6)$

पाठ्यपुस्तक इसी तुलना विधि में **a + b** और **ab** की शर्तों का उपयोग करती है।

---

11. अध्याय के महत्वपूर्ण सूत्र – Quick Revision

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

4. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

5. $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$

6. $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

---

12. याद रखने योग्य महत्वपूर्ण बिंदु

- सर्वसमिका चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है।
- सामान्य समीकरण केवल कुछ विशेष मानों के लिए सत्य हो सकता है।
- सर्वसमिकाओं को ज्यामितीय मॉडल और बीजीय टाइलों से प्रदर्शित किया जा सकता है।
- सर्वसमिकाओं से बड़ी संख्याओं के वर्गों की गणना सरल होती है।
- सर्वसमिकाओं का उपयोग बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में किया जाता है।

- द्विघातीय व्यंजकों के गुणनखंडन को बीजीय टाइलों की सहायता से भी समझा जा सकता है।

एक नज़र में

सर्वसमिका → सभी मानों के लिए सत्य

सर्वसमिका → विस्तार में उपयोगी

सर्वसमिका → संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने में उपयोगी

सर्वसमिका → गुणनखंडन में उपयोगी

बीजीय टाइलें → गुणनखंडन का दृश्यात्मक तरीका

$x^2 + px + q$ → योग और गुणनफल विधि से गुणनखंडन