Class 9 गणित मंजरी

Chapter 4 – बीजीय सर्वसमिकाओं का अन्वेषण

अंतिम प्रश्नावली – सभी 13 प्रश्नों के समाधान

अंतिम प्रश्नावली में कुल **13** प्रश्न हैं। नीचे प्रश्न 1 से 13 तक क्रमवार समाधान दिए गए हैं।

प्रश्न 1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए

(i) $(-3x + 4)^2$

$(-3x + 4)^2$
$= (3x - 4)^2$
$= (3x)^2 - 2(3x)(4) + 4^2$
$= 9x^2 - 24x + 16$

उत्तर: $\mathbf{9x^2 - 24x + 16}$

(ii) $(2s + 7)(2s - 7)$

$= (2s)^2 - 7^2$
$= 4s^2 - 49$

उत्तर: $\mathbf{4s^2 - 49}$

(iii) $(p^2 + 1/2)(p^2 - 1/2)$

$= (p^2)^2 - (1/2)^2$
$= p^4 - 1/4$

उत्तर: **$p^4 - 1/4$**

(iv) $(2n + 7)(2n - 7)$

$= (2n)^2 - 7^2$
$= 4n^2 - 49$

उत्तर: **$4n^2 - 49$**

(v) $(s - 2t)(s^2 + 2st + 4t^2)$

सर्वसमिका:

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

यहाँ $a = s$ और $b = 2t$

$= s^3 - (2t)^3$
$= s^3 - 8t^3$

उत्तर: **$s^3 - 8t^3$**

(vi) $(1/2r - 4r)^2$

$= (1/2r)^2 - 2(1/2r)(4r) + (4r)^2$
$= 1/4r^2 - 4 + 16r^2$

उत्तर: **$16r^2 - 4 + 1/4r^2$**

(vii) $(-3m + 4k - l)^2$

$= (-3m)^2 + (4k)^2 + (-l)^2$

- $2(-3m)(4k) + 2(4k)(-l) + 2(-3m)(-l)$

$= 9m^2 + 16k^2 + l^2 - 24mk - 8kl + 6ml$

उत्तर: **$9m^2 + 16k^2 + l^2 - 24mk + 6ml - 8kl$**

(viii) $(x - y/3)^3$

$= x^3 - 3x^2(y/3) + 3x(y/3)^2 - (y/3)^3$

$= x^3 - x^2y + xy^2/3 - y^3/27$

उत्तर: **$x^3 - x^2y + xy^2/3 - y^3/27$**

(ix) $(7k/2 - 2m/3)^3$

$= (7k/2)^3 - 3(7k/2)^2(2m/3)$

- $3(7k/2)(2m/3)^2 - (2m/3)^3$

$= 343k^3/8 - 49k^2m/2 + 14km^2/3 - 8m^3/27$

उत्तर: **$343k^3/8 - 49k^2m/2 + 14km^2/3 - 8m^3/27$**

प्रश्न 2. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके मान ज्ञात कीजिए

(i) 17 × 21

$= (19 - 2)(19 + 2)$
$= 19^2 - 2^2$
$= 361 - 4$
$= 357$

उत्तर: **357**

(ii) 104 × 96

$= (100 + 4)(100 - 4)$
$= 100^2 - 4^2$
$= 10000 - 16$
$= 9984$

उत्तर: **9984**

(iii) 24 × 16

$= (20 + 4)(20 - 4)$
$= 20^2 - 4^2$
$= 400 - 16$
$= 384$

उत्तर: **384**

(iv) 147^3

$= (150 - 3)^3$

$= 150^3 - 3(150)^2(3) + 3(150)(3)^2 - 3^3$

$= 3375000 - 202500 + 4050 - 27$

$= 3176523$

उत्तर: **3176523**

(v) 199^3

$= (200 - 1)^3$

$= 200^3 - 3(200)^2(1) + 3(200)(1)^2 - 1^3$

$= 8000000 - 120000 + 600 - 1$

$= 7880599$

उत्तर: **7880599**

(vi) 127^3

$= (120 + 7)^3$

$= 120^3 + 3(120)^2(7) + 3(120)(7)^2 + 7^3$

$= 1728000 + 302400 + 17640 + 343$

$= 2048383$

उत्तर: **2048383**

(vii) $(-107)^3$

$= -(107^3)$

$107^3 = (100 + 7)^3$

$= 1000000 + 210000 + 14700 + 343$

$= 1225043$

अतः,

उत्तर: **-1225043**

(viii) $(-299)^3$

$= -(299^3)$

$299^3 = (300 - 1)^3$

$= 27000000 - 810000 + 900 - 1$

$= 26190899$

अतः,

उत्तर: **-26190899**

प्रश्न 3. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों का गुणनखंड कीजिए

(i) $4y^2 + 1 + 1/16y^2$

$= (2y)^2 + 2(2y)(1/4y) + (1/4y)^2$

$= (2y + 1/4y)^2$

उत्तर: **$(2y + 1/4y)^2$**

(ii) $9m^2 - 1/25n^2$

$= (3m)^2 - (1/5n)^2$

$= (3m - 1/5n)(3m + 1/5n)$

उत्तर: **$(3m - 1/5n)(3m + 1/5n)$**

(iii) $27b^3 - 1/64b^3$

$= (3b)^3 - (1/4b)^3$

$= (3b - 1/4b)[9b^2 + 3/4 + 1/16b^2]$

उत्तर: **$(3b - 1/4b)(9b^2 + 3/4 + 1/16b^2)$**

(iv) $x^2 + 5x/6 + 1/6$

$= x^2 + x/2 + x/3 + 1/6$

$= x(x + 1/2) + 1/3(x + 1/2)$

$= (x + 1/2)(x + 1/3)$

उत्तर: **$(x + 1/2)(x + 1/3)$**

(v) $27u^3 - 27u^2/5 + 9u/25 - 1/125$

$= (3u)^3 - 3(3u)^2(1/5)$

- $3(3u)(1/5)^2 - (1/5)^3$

$= (3u - 1/5)^3$

उत्तर: **$(3u - 1/5)^3$**

(vi) $64y^3 + z^3/125$

$= (4y)^3 + (z/5)^3$

$= (4y + z/5)(16y^2 - 4yz/5 + z^2/25)$

उत्तर: **$(4y + z/5)(16y^2 - 4yz/5 + z^2/25)$**

(vii) $p^3 + 27q^3 + r^3 - 9pqr$

$= p^3 + (3q)^3 + r^3 - 3(p)(3q)(r)$

$= (p + 3q + r)(p^2 + 9q^2 + r^2 - 3pq - 3qr - pr)$

उत्तर: **$(p + 3q + r)(p^2 + 9q^2 + r^2 - 3pq - 3qr - pr)$**

(viii) $9m^2 - 12m + 4$

$= (3m)^2 - 2(3m)(2) + 2^2$

$= (3m - 2)^2$

उत्तर: **$(3m - 2)^2$**

(ix) $9x^3 - 8y^3/3 + z^3/3 + 6xyz$

$= 1/3(27x^3 - 8y^3 + z^3 + 18xyz)$

$= 1/3[(3x)^3 + (-2y)^3 + z^3 - 3(3x)(-2y)(z)]$

$= 1/3(3x - 2y + z)(9x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xy + 2yz - 3xz)$

उत्तर: **$1/3(3x - 2y + z)(9x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xy + 2yz - 3xz)$**

(x) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 12xy + 36yz + 24xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (6z)^2$

- $2(2x)(3y) + 2(3y)(6z) + 2(2x)(6z)$

$= (2x + 3y + 6z)^2$

उत्तर: **$(2x + 3y + 6z)^2$**

(xi) $27u^3 - 9u^2/2 + u/4 - 1/216$

$= (3u)^3 - 3(3u)^2(1/6)$

- $3(3u)(1/6)^2 - (1/6)^3$

$= (3u - 1/6)^3$

उत्तर: **$(3u - 1/6)^3$**

प्रश्न 4. निम्नलिखित को सरल कीजिए

(i) $(4x^2 + 4x + 1)/(4x^2 - 1)$

$= (2x + 1)^2 / [(2x + 1)(2x - 1)]$

$= (2x + 1)/(2x - 1)$

उत्तर: **$(2x + 1)/(2x - 1)$**

(ii) $9(3a^3 - 24b^3)/(9a^2 - 36b^2)$

$= 27(a^3 - 8b^3) / 9(a^2 - 4b^2)$

$= 3(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2) / [(a - 2b)(a + 2b)]$

$= 3(a^2 + 2ab + 4b^2)/(a + 2b)$

उत्तर: **$3(a^2 + 2ab + 4b^2)/(a + 2b)$**

(iii) $(s^3 + 125t^3)/(s^2 - 2st - 35t^2)$

$s^3 + 125t^3$
$= s^3 + (5t)^3$
$= (s + 5t)(s^2 - 5st + 25t^2)$

$s^2 - 2st - 35t^2$
$= (s - 7t)(s + 5t)$

अतः,

$= (s^2 - 5st + 25t^2)/(s - 7t)$

उत्तर: **$(s^2 - 5st + 25t^2)/(s - 7t)$**

प्रश्न 5. आयतों की लंबाई और चौड़ाई के संभावित व्यंजक ज्ञात कीजिए

(i) $25a^2 - 30ab + 9b^2$

$= (5a)^2 - 2(5a)(3b) + (3b)^2$

$= (5a - 3b)^2$

अतः,

लंबाई **= 5a - 3b**
चौड़ाई **= 5a - 3b**

(ii) $36s^2 - 49t^2$

$= (6s)^2 - (7t)^2$

$= (6s - 7t)(6s + 7t)$

अतः,

संभावित लंबाई **= 6s + 7t**
संभावित चौड़ाई **= 6s - 7t**

प्रश्न 6. घनाभों की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के संभावित व्यंजक ज्ञात कीजिए

(i) $6a^2 - 24b^2$

$= 6(a^2 - 4b^2)$

$= 6(a - 2b)(a + 2b)$

अतः संभावित विमाएँ:

6, (a - 2b), (a + 2b)

(ii) $3ps^2 - 15ps + 12p$

$= 3p(s^2 - 5s + 4)$

$= 3p(s - 1)(s - 4)$

अतः संभावित विमाएँ:

3p, (s - 1), (s - 4)

प्रश्न 7. वर्गाकार खेल के मैदान के चारों ओर बने मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

खेल का मैदान वर्गाकार है।

एक भुजा = 40 मीटर

मार्ग की चौड़ाई = s मीटर

बाहरी वर्ग की भुजा:

$= 40 + 2s$

बाहरी क्षेत्रफल:

$= (40 + 2s)^2$

$= 1600 + 160s + 4s^2$

भीतरी क्षेत्रफल:

$= 40^2$
$= 1600$

मार्ग का क्षेत्रफल:

$= 1600 + 160s + 4s^2 - 1600$

$= 4s^2 + 160s$

उत्तर: **$4s^2 + 160s$** वर्ग मीटर

प्रश्न 8. किसी संख्या और उसके व्युत्क्रम का योग 10/3 है। संख्या ज्ञात कीजिए

माना संख्या x है।

तब,

$x + 1/x = 10/3$

$3x^2 + 3 = 10x$

$3x^2 - 10x + 3 = 0$

$3x^2 - 9x - x + 3 = 0$

$3x(x - 3) - 1(x - 3) = 0$

$(x - 3)(3x - 1) = 0$

अतः,

$x = 3$

या

$x = 1/3$

उत्तर: संख्या **3** या **1/3** है।

प्रश्न 9. आयताकार ताल की लंबाई ज्ञात कीजिए

ताल का क्षेत्रफल:

$= 2x^2 + 7x + 3$

चौड़ाई:

$= 2x + 1$

अब क्षेत्रफल का गुणनखंडन करते हैं:

$2x^2 + 7x + 3$

$= 2x^2 + 6x + x + 3$

$= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$

$= (2x + 1)(x + 3)$

अतः,

क्षेत्रफल = चौड़ाई × लंबाई

$(2x + 1)(x + 3) = (2x + 1) \times$ लंबाई

इसलिए,

लंबाई **= x + 3** हस्त

प्रश्न 10. यदि x - 2 और x - 1/2 दोनों $px^2 + 5x + r$ के गुणनखंड हैं, तो दर्शाइए कि p = r

दिया है:

x - 2 और x - 1/2 दोनों गुणनखंड हैं।

अतः,

$px^2 + 5x + r = p(x - 2)(x - 1/2)$

अब,

$(x - 2)(x - 1/2)$

$= x^2 - 5x/2 + 1$

अतः,

$px^2 + 5x + r$

$= px^2 - 5px/2 + p$

दोनों पक्षों में स्थिर पद की तुलना करने पर:

$r = p$

अतः,

$p = r$ सिद्ध हुआ।

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25$

दिया है:

$a + b + c = 5$

$ab + bc + ca = 10$

हम जानते हैं:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

अब,

$(a + b + c)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$25 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(10)$

$a^2 + b^2 + c^2 = 5$

अतः,

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= 5 - 10$

$= -5$

इसलिए,

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= 5(-5)$

$= -25$

अतः सिद्ध हुआ कि $\mathbf{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25}$।

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक प्राकृतिक संख्या n के लिए $n^3 - n$, 6 से विभाज्य है

$n^3 - n$

$= n(n^2 - 1)$

$= n(n - 1)(n + 1)$

यह तीन क्रमागत पूर्णांकों का गुणनफल है:

$n - 1, n, n + 1$

तीन क्रमागत पूर्णांकों में:

- एक संख्या 3 से विभाज्य होती है।
- कम-से-कम एक संख्या 2 से विभाज्य होती है।

अतः उनका गुणनफल $2 \times 3 = 6$ से विभाज्य होगा।

इसलिए,

$\mathbf{n^3 - n}$ सदैव **6** से विभाज्य है।

प्रश्न 13. निम्न के मान ज्ञात कीजिए

(i) $x^3 + y^3 - 12xy + 64$, जब $x + y = -4$

हम जानते हैं:

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

दिया है:

$x + y = -4$

अतः,

$x^3 + y^3$

$= (-4)^3 - 3xy(-4)$

$= -64 + 12xy$

अब दिए गए व्यंजक में रखने पर:

$x^3 + y^3 - 12xy + 64$

$= (-64 + 12xy) - 12xy + 64$

$= 0$

उत्तर**: 0**

(ii) $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$, जब $x = 2y + 6$

दिया है:

$x = 2y + 6$

अतः,

$x - 2y - 6 = 0$

अब सर्वसमिका का उपयोग करें:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

यहाँ,

$a = x, b = -2y, c = -6$

तब,

$x^3 - 8y^3 - 216 - 36xy$

$= (x - 2y - 6)[...]$

लेकिन,

$x - 2y - 6 = 0$

अतः पूरा व्यंजक:

$= 0$

उत्तर: **0**

अंतिम उत्तर एक नज़र में

प्रश्न **1:**
(i) $9x^2 - 24x + 16$
(ii) $4s^2 - 49$
(iii) $p^4 - 1/4$
(iv) $4n^2 - 49$
(v) $s^3 - 8t^3$
(vi) $16r^2 - 4 + 1/4r^2$
(vii) $9m^2 + 16k^2 + l^2 - 24mk + 6ml - 8kl$
(viii) $x^3 - x^2y + xy^2/3 - y^3/27$
(ix) $343k^3/8 - 49k^2m/2 + 14km^2/3 - 8m^3/27$

प्रश्न **2:**
(i) 357
(ii) 9984
(iii) 384
(iv) 3176523
(v) 7880599
(vi) 2048383
(vii) -1225043
(viii) -26190899

प्रश्न **3:**
(i) $(2y + 1/4y)^2$

(ii) $(3m - 1/5n)(3m + 1/5n)$
(iii) $(3b - 1/4b)(9b^2 + 3/4 + 1/16b^2)$
(iv) $(x + 1/2)(x + 1/3)$
(v) $(3u - 1/5)^3$
(vi) $(4y + z/5)(16y^2 - 4yz/5 + z^2/25)$
(vii) $(p + 3q + r)(p^2 + 9q^2 + r^2 - 3pq - 3qr - pr)$
(viii) $(3m - 2)^2$
(ix) $1/3(3x - 2y + z)(9x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xy + 2yz - 3xz)$
(x) $(2x + 3y + 6z)^2$
(xi) $(3u - 1/6)^3$

प्रश्न **4:**
(i) $(2x + 1)/(2x - 1)$
(ii) $3(a^2 + 2ab + 4b^2)/(a + 2b)$
(iii) $(s^2 - 5st + 25t^2)/(s - 7t)$

प्रश्न **5:**
(i) $(5a - 3b)$, $(5a - 3b)$
(ii) $(6s + 7t)$, $(6s - 7t)$

प्रश्न **6:**
(i) 6, $(a - 2b)$, $(a + 2b)$
(ii) 3p, $(s - 1)$, $(s - 4)$

प्रश्न **7:** $4s^2 + 160s$ वर्ग मीटर
प्रश्न **8:** 3 या 1/3
प्रश्न **9:** $x + 3$ हस्त
प्रश्न **10:** $p = r$
प्रश्न **11:** -25
प्रश्न **12:** $n^3 - n$ सदैव 6 से विभाज्य
प्रश्न **13:** (i) 0, (ii) 0