Class 9 गणित मंजरी

Chapter 4 – बीजीय सर्वसमिकाओं का अन्वेषण

महत्वपूर्ण प्रश्न उत्तर कुंजी सहित

खंड A – अति महत्वपूर्ण लघु उत्तरीय प्रश्न

1. बीजीय सर्वसमिका क्या है? समीकरण और सर्वसमिका में अंतर स्पष्ट कीजिए।

उत्तर:
बीजीय सर्वसमिका वह समानता है जो उसमें उपस्थित चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है। जबकि समीकरण केवल कुछ विशेष मानों के लिए सत्य हो सकता है।

---

2. निम्नलिखित सर्वसमिकाओं को लिखिए—

(i) $(a + b)^2$
उत्तर: $a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a - b)^2$
उत्तर: $a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $(a + b)(a - b)$
उत्तर: $a^2 - b^2$

(iv) $(a + b + c)^2$
उत्तर: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

---

3. सर्वसमिका का उपयोग करके 105^2 ज्ञात कीजिए।

उत्तर:
$105^2 = (100 + 5)^2$
$= 10000 + 1000 + 25$
$= \mathbf{11025}$

---

4. सर्वसमिका का उपयोग करके **117^2** ज्ञात कीजिए।

उत्तर:
$117^2 = (100 + 17)^2$
$= 10000 + 3400 + 289$
$= \mathbf{13689}$

---

5. बिना सीधे गुणा किए **23×17** ज्ञात कीजिए।

उत्तर:
$23 \times 17 = (20 + 3)(20 - 3)$
$= 20^2 - 3^2$
$= 400 - 9$
$= \mathbf{391}$

---

6. बिना सीधे गुणा किए **198^2** ज्ञात कीजिए।

उत्तर:
$198^2 = (200 - 2)^2$
$= 40000 - 800 + 4$
$= \mathbf{39204}$

खंड **B** – विस्तार कीजिए

7. $(p + 3q + 7r)^2$ का विस्तार कीजिए।

उत्तर:
$= p^2 + 9q^2 + 49r^2 + 6pq + 42qr + 14pr$

---

8. $(3x - 2y + 4z)^2$ का विस्तार कीजिए।

उत्तर:
$= 9x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 12xy - 16yz + 24xz$

---

9. $(2x + 3y)^3$ का विस्तार कीजिए।

उत्तर:
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

---

10. $(3a - 2b)^3$ का विस्तार कीजिए।

उत्तर:
$= 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$

खंड C – गुणनखंड कीजिए

11. $x^2 + 4x + 4$ का गुणनखंड कीजिए।

उत्तर:
$= (x + 2)^2$

---

12. $16y^2 - 24y + 9$ का गुणनखंड कीजिए।

उत्तर:
$= (4y - 3)^2$

---

13. $9x^2 + 24xy + 16y^2$ का गुणनखंड कीजिए।

उत्तर:
$= (3x + 4y)^2$

---

14. $49x^2 - 25y^2$ का गुणनखंड कीजिए।

उत्तर:
$= (7x - 5y)(7x + 5y)$

---

15. $x^2 + 7x + 12$ का गुणनखंड कीजिए।

उत्तर:
= (x + 3)(x + 4)

---

16. $x^2 - 5x + 6$ का गुणनखंड कीजिए।

उत्तर:
= (x - 2)(x - 3)

---

17. $27a^3 - 8b^3$ का गुणनखंड कीजिए।

उत्तर:
= $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

---

18. $8x^3 + 27y^3$ का गुणनखंड कीजिए।

उत्तर:
= $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

---

19. $p^3 + 27q^3 + r^3 - 9pqr$ का गुणनखंड कीजिए।

उत्तर:
= $(p + 3q + r)(p^2 + 9q^2 + r^2 - 3pq - 3qr - pr)$

खंड **D** – परिमेय बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण

20. $(4x^2 + 4x + 1)/(4x^2 - 1)$ को सरल कीजिए।

उत्तर:
= $(2x + 1)^2 / [(2x + 1)(2x - 1)]$
= **$(2x + 1)/(2x - 1)$**

---

21. $(s^3 + 125t^3)/(s^2 - 2st - 35t^2)$ को सरल कीजिए।

उत्तर:
$s^3 + 125t^3 = (s + 5t)(s^2 - 5st + 25t^2)$

$s^2 - 2st - 35t^2 = (s + 5t)(s - 7t)$

अतः,

उत्तर **= $(s^2 - 5st + 25t^2)/(s - 7t)$**

---

22. $(9a^2 - 25b^2)/(3a + 5b)$ को सरल कीजिए।

उत्तर:
= $(3a - 5b)(3a + 5b)/(3a + 5b)$
= **$3a - 5b$**

खंड **E** – महत्वपूर्ण अनुप्रयोग आधारित प्रश्न

23. वर्गाकार खेल के मैदान की प्रत्येक भुजा **40** मीटर है। उसके चारों ओर **s** मीटर चौड़ा मार्ग बना है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

बाहरी भुजा = $40 + 2s$

मार्ग का क्षेत्रफल
= $(40 + 2s)^2 - 40^2$
= $1600 + 160s + 4s^2 - 1600$
= **$4s^2 + 160s$** वर्ग मीटर

---

24. किसी आयत का क्षेत्रफल **$2x^2 + 7x + 3$** है और चौड़ाई **$(2x + 1)$** है। लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

$2x^2 + 7x + 3$
$= 2x^2 + 6x + x + 3$
$= (2x + 1)(x + 3)$

अतः,

लंबाई **= x + 3**

---

25. किसी संख्या **x** और उसके व्युत्क्रम का योग **10/3** है। संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

$x + 1/x = 10/3$

$3x^2 - 10x + 3 = 0$

$(3x - 1)(x - 3) = 0$

अतः,

x = 3 या **x = 1/3**

खंड F – बहुत महत्वपूर्ण सिद्ध कीजिए

26. यदि **x - 2** और **x - 1/2** दोनों **$px^2 + 5x + r$** के गुणनखंड हैं, तो सिद्ध कीजिए कि **p = r**।

उत्तर:

$px^2 + 5x + r$
$= p(x - 2)(x - 1/2)$

$= p(x^2 - 5x/2 + 1)$

स्थिर पदों की तुलना करने पर,

r = p

अतः, **p = r** सिद्ध हुआ।

---

27. यदि **a + b + c = 5** तथा **ab + bc + ca = 10,** तो सिद्ध कीजिए कि

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25$।

उत्तर:

$a^2 + b^2 + c^2$
$= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

$= 25 - 20$
$= 5$

अब,

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= 5(5 - 10)$

$= \mathbf{-25}$

अतः सिद्ध हुआ।

---

28. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक प्राकृतिक संख्या **n** के लिए $\mathbf{n^3 - n}$, **6** से विभाज्य है।

उत्तर:

$n^3 - n$
$= n(n^2 - 1)$
$= n(n - 1)(n + 1)$

ये तीन क्रमागत पूर्णांक हैं। इनमें एक संख्या 2 से तथा एक संख्या 3 से विभाज्य होगी।

अतः,

n(n - 1)(n + 1), 6 से विभाज्य है।

इसलिए, $\mathbf{n^3 - n}$ सदैव **6** से विभाज्य है।

Answer Key – एक नज़र में

प्रश्न	उत्तर
1	सभी मानों के लिए सत्य समानता
2(i)	$a^2 + 2ab + b^2$
2(ii)	$a^2 - 2ab + b^2$
2(iii)	$a^2 - b^2$
2(iv)	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
3	11025
4	13689
5	391
6	39204
7	$p^2 + 9q^2 + 49r^2 + 6pq + 42qr + 14pr$
8	$9x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 12xy - 16yz + 24xz$
9	$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
10	$27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$
11	$(x + 2)^2$
12	$(4y - 3)^2$
13	$(3x + 4y)^2$
14	$(7x - 5y)(7x + 5y)$
15	$(x + 3)(x + 4)$
16	$(x - 2)(x - 3)$
17	$(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$
18	$(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
19	$(p + 3q + r)(p^2 + 9q^2 + r^2 - 3pq - 3qr - pr)$

20 $(2x + 1)/(2x - 1)$

21 $(s^2 - 5st + 25t^2)/(s - 7t)$

22 $3a - 5b$

23 $4s^2 + 160s$ वर्ग मीटर

24 $x + 3$

25 3 या 1/3

26 $p = r$

27 -25

28 6 से विभाज्य